L'algorithme du simplexe appliqué à un exemple

S. Balev

Une entreprise fabrique quatre produits. La fabrication de chaque produit nécessite une certaine quantité de ressources. Les ressources consommées, les stocks des ressources et les bénéfices des produits sont récapitulés dans le tableau suivant :

	produit 1	produit 2	produit 3	produit 4	stock
ressource A	2	4	5	7	42
ressource B	1	1	2	2	17
ressource C	1	2	3	3	24
bénéfice	7	9	18	17	

On souhaite établir un plan de production de façon à maximiser le chiffre d'affaires.

Appelant x_1, x_2, x_3, x_4 les quantités respectives de produits 1, 2, 3, 4, le problème admet la modélisation suivante :

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{Maximiser } z = & 7x_1 & + & 9x_2 & + & 18x_3 & + & 17x_4 & & \\
\text{s. c.} & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & \leq & 42 \\
& x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & \leq & 17 \\
& x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & \leq & 24 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

On reconnaît là un problème de programmation linéaire sous *forme standard*.

Introduisons trois *variables d'écart* x_5, x_6, x_7, qui mesurent pour chaque ressource l'écart entre la quantité initialement disponible et la quantité consommée par le plan de fabrication donné par les *variables de décision* x_1, x_2, x_3, x_4. On obtient une formulation équivalente du problème :

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcr}
\text{Maximiser } z = & 7x_1 & + & 9x_2 & + & 18x_3 & + & 17x_4 & & & & & & & & \\
\text{s. c.} & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & + & x_5 & & & & & = & 42 \\
& x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & & & + & x_6 & & & = & 17 \\
& x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & & & & & + & x_7 & = & 24 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & , & x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

Cette formulation permet d'exprimer facilement les variables d'écart comme fonctions affines des variables de décision :

$$
\begin{array}{|rcrcrcrcrcr|}
\hline
x_5 & = & 42 & - & 2x_1 & - & 4x_2 & - & 5x_3 & - & 7x_4 \\
x_6 & = & 17 & - & x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 \\
x_7 & = & 24 & - & x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & - & 3x_4 \\
\hline
z & = & & & 7x_1 & + & 9x_2 & + & 18x_3 & + & 17x_4 \\
\hline
\end{array}
\qquad \text{Dictionnaire 1}
$$

Le tableau ci-dessus est appelé un *dictionnaire*. Les variables x_5, x_6, x_7 sont des *variables de base* et x_1, x_2, x_3, x_4 sont des *variables hors-base*. La *solution basique* associée à un dictionnaire est obtenue en donnant la valeur 0 à toutes les variables hors-base. La solution basique correspondant au Dictionnaire 1 est donc $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, entraînant $x_5 = 42$, $x_6 = 17$, $x_7 = 24$. Le bénéfice correspondant est $z = 0$. Cette solution est « le plan de production du mois d'août » – on ne produit rien, on ne consomme aucune ressource et on ne gagne rien. Néanmoins, c'est une *solution réalisable*, car elle satisfait aux toutes les contraintes. On peut remarquer que cette solution basique correspond au sommet de coordonnées $(0, 0, 0, 0)$ du polyèdre des contraintes.

En partant de cette solution basique, on cherche à améliorer le bénéfice. Considérons une variable hors-base dont le coefficient dans la dernière ligne du dictionnaire es positif. Dans le

Dictionnaire 1 tous les coefficients de la dernière ligne sont positifs, donc on peut prendre n'importe quelle variable. Choisissons, par exemple, x_3. Il est évident que si on fait croître x_3 à partir de 0, les autres variables hors-base restant nulles, la valeur de la fonction z croît. Mais jusqu'où peut-on « pousser » x_3, tout en gardant x_1, x_2 et x_4 à zéro ? Il faut que la solution reste réalisable. Les contraintes sur l'augmentation de x_3 sont :

$$\begin{array}{lclcl} x_5 \geq 0 & \Rightarrow & 42 - 5x_3 \geq 0 & \Rightarrow & x_3 \leq 8.4 \\ x_6 \geq 0 & \Rightarrow & 17 - 3x_3 \geq 0 & \Rightarrow & x_3 \leq 8.5 \\ x_7 \geq 0 & \Rightarrow & 24 - 3x_3 \geq 0 & \Rightarrow & x_3 \leq 8 \end{array}$$

La plus restrictive de ces contraintes est $x_3 \leq 8$. L'interprétation géométrique est la suivante : en partant du sommet $(0, 0, 0, 0)$ du polyèdre des contraintes, on se déplace sur une arête de ce polyèdre. Le premier hyperplan rencontré est $x_7 = 0$. On arrive alors dans un nouveau sommet, à l'intersection des hyperplans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$, $x_7 = 0$.

Nous allons faire un changement de dictionnaire en échangeant les rôles de x_3 et x_7. On utilise la troisième équation du Dictionnaire 1 pour exprimer x_3 en fonction de x_1, x_2, x_4 et x_7 :

$$x_3 = 8 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - x_4 - \frac{1}{3}x_7$$

On remplace ensuite x_3 par cette expression dans les autres équations du dictionnaire :

$$\begin{array}{|lcrclclclcr|} x_5 & = & 2 & - & \frac{1}{3}x_1 & - & \frac{2}{3}x_2 & + & \frac{5}{3}x_7 & - & 2x_4 \\ x_6 & = & 1 & - & \frac{1}{3}x_1 & + & \frac{1}{3}x_2 & + & \frac{2}{3}x_7 & & \\ x_3 & = & 8 & - & \frac{1}{3}x_1 & - & \frac{2}{3}x_2 & - & \frac{1}{3}x_7 & - & x_4 \\ \hline z & = & 144 & + & x_1 & - & 3x_2 & - & 6x_7 & - & x_4 \\ \hline \end{array}$$

Dictionnaire 2

La variable x_7 est *sortie* de la base et la variable x_7 est *entrée* en base. La nouvelle base est x_5, x_6, x_3. La solution basique associée au Dictionnaire 2 est $x_1 = x_2 = x_7 = x_4 = 0$, $x_5 = 2$, $x_6 = 1$, $x_3 = 8$. Elle correspond au sommet de coordonnées $(0, 0, 8, 0)$ du polyèdre de contraintes. Cette solution définit un plan de production beaucoup plus intéressant : on fabrique 8 unités du produit 3 ($x_3 = 8$) en consommant entièrement la ressource C ($x_7 = 0$). Il nous reste $x_5 = 2$ unités de la ressource A et $x_6 = 1$ unité de B. Le bénéfice est $z = 144$.

Est-ce qu'on peut faire mieux ? Dans la nouvelle expression de la fonction z, nous voyons que seule la variable x_1 a un coefficient positif. Nous décidons de faire entrer x_1 en base, et ainsi de parcourir une nouvelle arête du polyèdre des contraintes. On a les limites suivantes sur l'augmentation de x_1 :

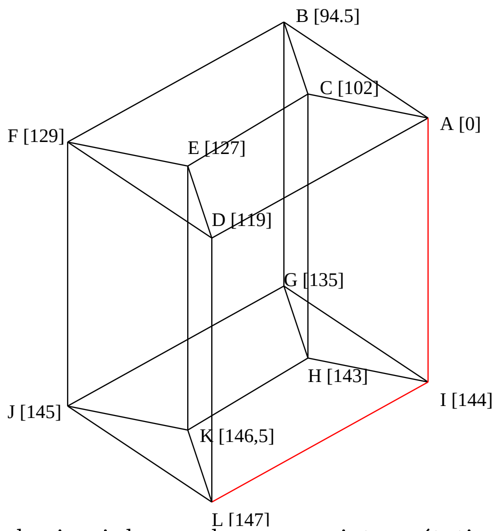
$$\begin{array}{lcl} x_5 \geq 0 & \Rightarrow & x_1 \leq 6 \\ x_6 \geq 0 & \Rightarrow & x_1 \leq 3 \\ x_3 \geq 0 & \Rightarrow & x_1 \leq 24 \end{array}$$

d'où $x_1 \leq 3$. On fait sortir x_6 de la base on et fait entrer x_1 à sa place. On obtient le dictionnaire suivant :

$$\begin{array}{|lcrclclclcr|} x_5 & = & 1 & + & x_6 & - & x_2 & + & x_7 & - & 2x_4 \\ x_1 & = & 3 & - & 3x_6 & + & x_2 & + & 2x_7 & & \\ x_3 & = & 7 & + & x_6 & - & x_2 & - & x_7 & - & x_4 \\ \hline z & = & 147 & - & 3x_6 & - & 2x_2 & - & 4x_7 & - & x_4 \\ \hline \end{array}$$

Dictionnaire 3

La solution basique associée $x_6 = x_2 = x_7 = x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_1 = 3$, $x_3 = 7$, correspond au sommet $(3, 0, 7, 0)$ du polyèdre des contraintes. Elle définit le plan de production suivant : on fabrique 3 unités du produit 1 et 7 unités de produit 3. Il ne nous reste qu'une unité de la ressource A. Le bénéfice est $z = 147$. De plus, tous les coefficients de la dernière ligne sont négatifs, donc on ne peut pas se déplacer vers un sommet voisin en augmentant la fonction du profit. Nous avons alors trouvé la solution optimale du problème.



sommet	x_1	x_2	x_3	x_4	z
A	0	0	0	0	0
B	0	10.5	0	0	94.5
C	0	0	0	6	102
D	17	0	0	0	119
E	11.67	0	0	2.67	127
F	13	4	0	0	129
G	0	3	6	0	135
H	0	0	7	1	143
I	0	0	8	0	144
J	4	1	6	0	145
K	3	0	6.5	0.5	146.5
L	3	0	7	0	147

Le dessin si-dessus donne une interprétation géométrique du problème. A gauche, on voit les sommets et les arêtes du polyèdre des contraintes. La valeur de la fonction objective est donnée entre crochets. La table à droite donne les coordonnées de chaque sommet. Nous avons parcouru le chemin A-I-L.

La forme de tableaux est un formalisme plus facile à manipuler et automatiser, mais qui effectue les mêmes opérations. Chaque dictionnaire est représenté par un tableau de la forme

$$
\begin{array}{|c||c|ccc|}
\hline
B & & x_1 & \dots & x_{n+m} \\
\hline
x_{B_1} & \overline{b}_1 & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1,n+m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_{B_m} & \overline{b}_m & \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{m,n+m} \\
\hline
 & z & \overline{c}_1 & \dots & \overline{c}_{n+m} \\
\hline
\end{array}
$$

Les règles de manipulation des tableaux sont :

1. *Initialisation.* $\overline{b}_i = b_i$, $\overline{c}_j = c_j$, $\alpha_{ij} = a_{ij}$, $z = 0$.
2. *Choix de colonne pivot* (variable à entrer en base).
   (a) Si $\overline{c}_j \leq 0$, $j = 1, \dots, n+m$, alors STOP (la solution optimale est trouvée).
   (b) Sinon, choisir une colonne s, telle que $\overline{c}_s > 0$.
3. *Choix de ligne pivot* (variable à sortir de la base).
   (a) Si $\alpha_{is} \leq 0$, $i = 1, \dots, m$, alors STOP (la fonction objective n'est pas bornée).
   (b) Sinon, choisir une ligne r, telle que

$$\frac{\overline{b}_r}{\alpha_{rs}} = \min\left\{\frac{\overline{b}_i}{\alpha_{is}} \ : \ i = 1, \dots, m, \ \alpha_{is} > 0\right\}$$

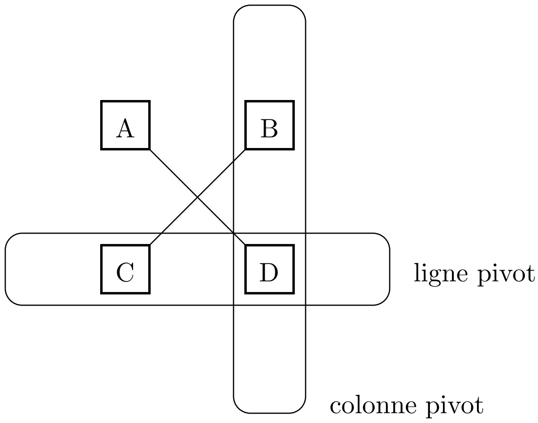
4. *Pivot* (passage d'un tableau au tableau suivant).
   (a) Transformation de la ligne pivot : elle est divisée par l'élément pivot.

$$\overline{b}'_r = \frac{\overline{b}_r}{\alpha_{rs}}; \ \ \alpha'_{rj} = \frac{\alpha_{rj}}{\alpha_{rs}}, \ j = 1, \dots n+m$$

   (b) Transformation de la colonne pivot : toutes les cases sauf la case pivot deviennent zéro.

$$\alpha'_{is} = 0, \ i = 1, \dots, r-1, r+1, \dots, m$$

(c) Transformation des autres cases du tableau. On applique la règle suivante :



$$A' = A - \frac{B \times C}{D}$$

Formellement,

$$\alpha'_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{is}\alpha_{rj}}{\alpha_{rs}},\ \overline{b}'_i = \overline{b}_i - \frac{\alpha_{is}\overline{b}_r}{\alpha_{rs}},\ \overline{c}'_j = \overline{c}_j - \frac{\overline{c}_s\alpha_{rj}}{\alpha_{rs}},\ z' = z + \frac{\overline{c}_s\overline{b}_r}{\alpha_{rs}}$$

En appliquant l'algorithme ci-dessus sur notre exemple, on obtient

B	$\overline{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	42	2	4	5	7	1	0	0
x_6	17	1	1	2	2	0	1	0
x_7	24	1	2	3	3	0	0	1
$\overline{c}$	0	7	9	18	17	0	0	0
x_5	2	1/3	2/3	0	2	1	0	-5/3
x_6	1	1/3	-1/3	0	0	0	1	-2/3
x_3	8	1/3	2/3	1	1	0	0	1/3
$\overline{c}$	144	1	-3	0	-1	0	0	-6
x_5	1	0	1	0	2	1	-1	-1
x_1	3	1	-1	0	0	0	3	-2
x_3	7	0	1	1	1	0	-1	1
$\overline{c}$	147	0	-2	0	-1	0	-3	-4